高上　213)

関数 $y=\tan x$ は, 区間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ で単調増加である。したがって，この区間で逆関数をつくることができる。それを $y=\phi(x)$ とかく。

正確を期すために, $-\frac{\pi}{2}<\phi(x)<\frac{\pi}{2}$ としておく。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\phi(\sqrt{2}x+1)+\phi(\sqrt{2}x-1)\}$$

とおく。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}dx$ を求めたい。正確な値は求められないので, 以下のようにする。

すなわち, 関数 $G(x)$ で $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}dx=G(\sqrt{2}+1)$ となる関数を求めよ。

(3) 積分の等式 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^4 x}dx$ を示せ。

(4) 積分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx$ を求めよ。