高上　215)

正の数 n と $0 < x < n+1$ である x に対して

$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}\right), g_n(x) = f_n(x) + \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!(n+1-x)}$

とする.

(1) $f_n'(x), g_n'(x)$ を求めよ.

(2) $f_n(x) < 1 < g_n(x)$ が成立することを示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty} e f_n(1)$ を求めよ.

(4) $n(n+1) = 2n + n(n-1)$ を利用して, 次の無限級数の和を求めよ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n!}$