高上　201)
座標平面上で, 媒介変数表示 $x = \sin 2\theta$, $y = \sin 3\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$ が定める図のような曲線 C と x軸で囲まれた図形を D として，次の問いに答えよ。
(1) 曲線 C 上の点で x 座標が 1 であるものを求めよ。
(2) 図形 D の面積 S を求めよ。
(3)図形 Dを x軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

高上　202
z を複素数とし，　i を虚数単位とする。
(1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。
(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

高上　203)

$a_1=2, a_{n+1}=\frac{4a_n^2+9}{8a_n}(n=1,2\ ,\ 3,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) $0<a_{n+1}-\frac{3}{2}<\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)^2$ を証明せよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

高上　204)

$\log x$ を x の自然対数とする.

(1) $x>1$ のき, $\log x<x-1$

が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^2}{x^2}$ を求めよ.

(3) $s>0$ のとき $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^s}$ を求めよ

高上　205)
区間 $[0,1]$ に属する t に対し，積分

$$f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t\cos x}dx$$

を考える.
(1) $f(1)$ の値を求めよ.
(2) $0\leqq a<b\leqq 1$ を満たす任意の a,b に対し,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(b-a)\leqq f(b)-f(a)\leqq\frac{1}{2}(b-a)$$

を証明せよ。そして, $f(t)$ は区間 $[0,1]$ で連続であると証明せよ。
(3) $f(c)=\sqrt{3}$ を満たすようなcが区間 $(0,1)$ において唯一存在することを証明せよ。

高上　206)
xy 平面上の曲線 $C:y=x^3$ 上の点 P における接線を，　P を中心にして反時計 回りに 45° 回転して得られる直線を L とする. CとLが, 相異なる 3 点で交わるようなPの範囲を図示せよ。

高上 207)

$-\frac{1}{2} \leqq b \leqq 1, \quad b \neq 0$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n} dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

定義する。

(1) $\lim_{n\to\infty} b^n a_n = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) a_{n+1} を a_n, n, b を用いて表せ。

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\right\}$$

を求めよ。

高上 208)
a, b を正の定数とするとき, 不等式
$(ax+b)\log(ax+b) - b\log b \geqq cx$
がすべての $x \geqq 0$
に対して成り立つような c の範囲を求めよ。

高上　209)
関数 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x - \sin^2\theta \right| \sin\theta d\theta$ の
$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を 求めよ。

高上　210)
関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ で定める。
(1) $y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ。
(2)（1）で求めた法線と x 軸および
$y=f(x)$ のグラフによって囲まれる 図形の面積を求めよ。
（京都大）

高上　211)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}, z_0=1$ とする。複素数平面の原点を O, z_0 の表す点を A_0 とす る。線分 OA_0 を直径とする円上の点 $\mathrm{A}_1(z_1)$ で $z_1 \neq 0, \angle \mathrm{A}_0\mathrm{OA}_1=\theta$ であり $\frac{z_1}{z_0}$ の虚部が正であるものを考える。同様に $n=1,2,\cdots\cdots$ に対して,線分 OA_n を直径とする円上の点 $\mathrm{A}_{n+1}(z_{n+1})$ で
$z_{n+1} \neq 0, \angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}=\frac{\theta}{2^n}$ であり $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ の虚部が正であるものを考える。

(1) すべての自然数 n について次が成り立つことを示せ。

$$|z_n|=\frac{\sin 2\theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}$$

(2) $0<x<\theta$ のとき, $\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{\sin x}{x}<1$ が成り立つことを示せ。

(3) 三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき, 次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\sin^2 2\theta}{8\theta}<\sum_{n=1}^{\infty} S_n<\frac{\sin^2 2\theta}{8\sin\theta}$$

高上 212) 関数

$f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減と極値を調べ, $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) a, b を 0 以上の整数とする。このとき

$$\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b dx=\frac{a+1}{b+1}\int_0^1 x^a(1-x)^{b+1}dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4) (3)の図形を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

高上 213)

関数 $y=\tan x$ は, 区間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ で単調増加である。

したがって, この区間で逆関数をつくることができる。それ を $y=\phi(x)$ とかく。

正確を期すために, $-\frac{\pi}{2}<\phi(x)<\frac{\pi}{2}$ としておく。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\phi(\sqrt{2}x+1)+\phi(\sqrt{2}x-1)$$

とおく。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}dx$ を求めたい。正確な値は求められないの で, 以下のようにする。

すなわち, 関数 $G(x)$ で $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}dx=G(\sqrt{2}+1)$ となる関 数を求めよ。

(3) 積分の等式 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^4 x}dx$ を示せ。

(4) 積分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}dx$ を求めよ。

高上　214)

2 以上の整数 n に対して方程式

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=x_1x_2\cdots\cdots x_n$$

の正の整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を考える. ただし, たとえば (1,2,3)と（3,2,1）は異なる解とみなす. このとき次の問いに答えよ。

(1) $n=2$ および $n=3$ ときの解をすべて求めよ.

(2)解が1つしかないようなnをすべてもとめよ。

(3）任意のnに対して解は少なくとも1つ存在し, かつ有限個しかないことを示せ.

高上　215)
正の数 n と $0 < x < n+1$ である x に対して
$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}\right), g_n(x) = f_n(x) + \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!(n+1-x)}$
とする.
(1) $f_n'(x), g_n'(x)$ を求めよ.
(2) $f_n(x) < 1 < g_n(x)$ が成立することを示せ.
(3) $\lim_{n\to\infty} ef_n(1)$ を求めよ.
(4) $n(n+1) = 2n + n(n-1)$ を利用して, 次の無限級数の和を求めよ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n!}$

高上　216)
平面上において同一直線上にない 3 点 A, B, Cがあるとき,
次の各問に 対して、それぞれの式をみたす点 P の集合を求めよ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \leqq \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

高上　217)
$f(x)$を $f(1) = 1$ である連続関数とする. 関数
$g(x) = \int_0^x f(x+t)dt$ が $g'(2^n) = \frac{1}{4^n}(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$
を満たすとき
(1) $f(2^n)$ を n の式で表せ.
(2) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(2^n)$ の和を求めよ。

高上　218)　複素数平面上における図形

$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n, \cdots\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし, i は虚数単位とする。

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B) 自然数 n に対して, z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1) すべての自然数 n に対して, C_n は円であることを示し, その中心を表す 複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき, d_n を求めよ。 また $\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。

高上 219) 実数 a は $a>1$ とする。曲線 $y=e^x$ と直線 $y=a-1$, 直線 $y=a$ 及び y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させて得 られる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1) $V(a)$ を求めよ。

(2) $V(a)$ を最小とする a の値を求めよ。

(3) 次の極限を求めよ。

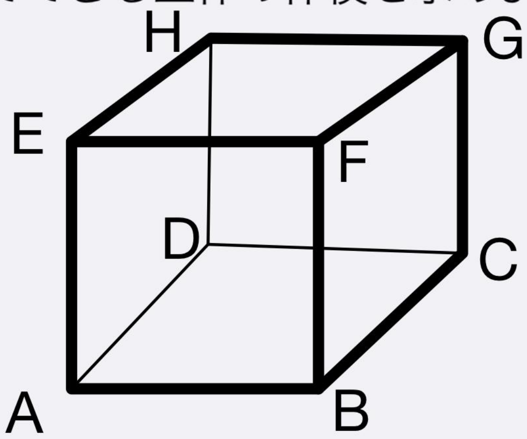
$$\lim_{a\to\infty}(V(a)-V(a-1))$$

必要ならば,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

を証明なしで用いてよい。

高上　220)
図のような 1 辺の長さ a の立方体
ABCD - EFGHがある。線分 $\mathrm{AF}, \mathrm{BG}, \mathrm{CH}, \mathrm{DE}$ 上にそれぞれ動点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ があり, 頂点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, D$ を同時に出発して同じ速さで頂点 $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{E}$まで動く。このとき，四角形 PQRS が通過し てできる立体の体積を求めよ。



高上　221)
四角形 ABCD が，　半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で, 辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき, 残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

高上　222)

$$\lim_{n \to \infty} n\left[\frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)^3}{n} - \frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - (n+1)\right)^3}{n+1}\right]$$

を求めよ。

高上　223)

$$\frac{2^n}{n} > n$$

をみたす自然数nの範囲を求めよ。

高上　224)
関数 $y=\log x$ のグラフ上の 1 点 $\mathrm{P}(s, \log s)(s \geqq 1)$ における接線と y 軸の交点をQとする. グラフ上に 定点 $\mathrm{A}(1,0)$ をとる. AP 間のグラフの長さを $\overparen{\mathrm{AP}}$, 線分 PQ の長さを $\overline{\mathrm{PQ}}$ とし, $t=\overline{\mathrm{PQ}}-\overparen{\mathrm{AP}}$ とする. t は s の関数である.
(1) $\frac{dt}{ds}$ を s で表わせ.
（2） $u=\frac{1}{S}, v=\sqrt{1+u^2}$ とおくとき, $\frac{du}{dt}$ および $\frac{dv}{dt}$ をuの関数として表わせ.
(3) u を t の関数として表わせ.

高上　225)
　$0 \leqq x \leqq \pi$ とし, $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおく.また,曲線 $y=f_n(x)(0 \leqq x \leqq \pi)$, $y=f(x)(0 \leqq x \leqq \pi)$ の長さをそれぞれ L_n, L とする.
(1) L_n を L_1 で表せ.
(2) $\sqrt{1+t}<1+\frac{1}{2}t(t>0)$ を示し, $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4(L_n-L)}{L}\right\}^n$ を求めよ.

高上　226)
実数 a は $0<a \leqq 2$ の範囲を動くものとする。
(1) $y=\sqrt{x}$ と $y=\frac{2}{a}x+1-\frac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ。
(2) 2 次方程式 $(2x+a-1)^2=a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α, β(ただし $|\alpha| \leqq |\beta|$) とする。このとき, $|\beta|$ の最小値を求めよ。

高上　227)
楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 P とおける接線 l と, 原点Oを通り l と直交する直線 l' との交点をQとする. $\theta=\angle POQ$ とするとき, $\cos\theta$ の最小値を求めよ.

高上　228)
a は 1 より大きい定数とし, xy 平面上の点 $(a,0)$ を A, 点 $(a,\log a)$ を B, 曲線 $y=\log x$ と x 軸の交点をCとする. 更に, x 軸 線分 BA および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする.
(1) $1\leqq b\leqq a$ となる b に対し点 $(b,\log b)$ を D とする. 四角形 ABDC の面積が S_1 に最も近くなるような b の値と，そのときの四角形 ABDC の面積 S_2 を求めよ.
(2) $a\to\infty$ のときの $\frac{S_2}{S_1}$ の極限値を求めよ.

高上　229)
関数
$f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)x+\left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_n}^2\right)$
を考える。ただし、n は正の整数で, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ は実数である。
(1) $n=1$ および $n=2$ のとき、常に $f(x) \geqq 0$ であることを示せ。
(2) 全ての n に対し, 常に $f(x) \geqq 0$ であることを示せ。
(3)
$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2 \leqq n\left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_n}^2\right)$
であることを示せ。
(4)
$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2 = n\left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_n}^2\right)$
であれば, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はすべて等しいことを示せ。

高上　230)

$x-a\sin x-b=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$①

a,b は定数, $0<a<1$ とする。

(1)①はただ１個の実数解をもつことを示せ. この解を c とする。

(2)

$x_1=0, x_{n+1}=a\sin x_n+b\,(n=1,2,\cdots)$

によって $x_1, x_2,\cdots\cdots$ を定義するとき, 不等式 $|x_{n+1}-c|\leqq a|x_n-c|$ が成り立つことを示し，数列 $\{x_n\}$ は c に収束することを示せ。